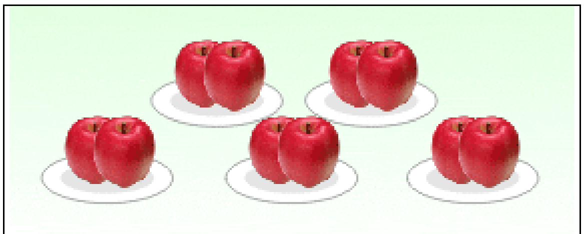
Vollkommene Zahlen

Wer teilt wen?

5 **teilt** 10 (oder: 5 ist ein **Teiler** von 10), denn $5 \cdot 2 = 10$.
4 **teilt** 12 (oder: 4 ist ein **Teiler** von 12), denn $4 \cdot 3 = 12$.
9 **teilt** 45 (oder: 9 ist ein **Teiler** von 45), denn $9 \cdot 5 = 45$.



5 teilt 10.

Aufgabe. Ergänze selbst!

7 teilt 28, denn 7· = 28.	11 teilt , denn 11· = 33.
6 teilt , denn · = 24.	5 teilt 35, denn
teilt 27, denn	4 teilt , denn
8 teilt	teilt 30

Echte Teiler

Die positiven Teiler von 30 sind 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 und 30. Dabei nennt man 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 die **echten Teiler** von 30, weil sie echt kleiner als 30 sind.

Aufgabe. Schreibe alle echten Teiler von 12 auf!

____

Zur Kontrolle: Wenn du sie alle addierst, kommt 16 heraus. Diese Summe aller echten Teiler einer Zahl wollen wir ihre ***Kontrollsumme*** *nennen. Die Kontrollsumme von 12 ist demnach 16.*

Aufgabe. Finde jeweils alle echten Teiler der folgenden Zahlen.

Zahl	echte Teiler	*Kontroll-summe*
1		*0*
2		*1*
3		*1*
4		*3*
5		*1*

Zahl	echte Teiler	*Kontroll-summe*
6		*6*
7		*1*
8		*7*
9		*4*
10		*8*

Aufgabe. Finde alle echten Teiler von 20.

____

Die Kontrollsumme ist 22.

Aufgabe. Finde alle echten Teiler von 18

____

Die Kontrollsumme ist _____________.

Teilerpuzzle

<u>Material:</u> Die Zahlenkarten 1 … 50 bekommst du von deinem Lehrer.

<u>Spielanleitung</u>
Lege neun der 50 Karten zu einem Quadrat zusammen. Beachte dabei überall die folgende
Spielregel:
Benachbarte Karten sollen immer Teiler oder Vielfache voneinander sein.
Im Bild rechts siehst du eine Lösung.
Überprüfe, ob die Spielregel hier wirklich überall eingehalten wird.

10	20	2
1	4	8
32	16	48

Weitere Lösungen erhältst du, wenn du diese Lösung nimmst und einfach drehst. Dann könnte zum Beispiel die 32 links oben stehen, die 10 rechts oben, die 2 unten rechts und so weiter. Man kann auch anders drehen oder die Lösung spiegeln.
Es gibt aber auch **ganz neue Lösungen**, die man nicht durch Drehen oder Spiegeln erreichen kann. **Die sollst Du finden!**

Dieses Spiel ist nicht leicht.
Darum ein **Tipp**: Hebe die 1 so lange auf wie möglich!

Wenn du ein paar Lösungen gefunden hast, kannst du dich an die **Profiversion** des Spiels wagen: Suche jetzt 16 Karten, mit denen du ein 4x4-Quadrat legen kannst!

Viel Erfolg beim Puzzeln!

?	?	?	?
?	?	?	?
?	?	?	?
?	?	?	?

Bitte beachte: Die Zahlenkärtchen brauchst du später noch einmal für das ggT-Puzzle.

Spielfeld für das Teiler-Puzzle

Bitte auf Tonpapier drucken oder laminieren.

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

Die Karten auf der nächsten Seite werden sowohl für das Teiler-Puzzle als auch für das ggT-Puzzle benötigt. Sie sollten auf Tonpapier gedruckt oder laminiert und anschließend ausgeschnitten werden.

1	2	3	4	5	6.
7	8	9.	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50				

Vollkommene Zahlen

Eine Zahl heißt **vollkommen**, wenn sie gleich ihrer *Kontrollsumme* ist. Beispiel: 6 ist eine vollkommene Zahl, denn ihre *Kontrollsumme* ist *1 + 2 + 3 = 6*.
Bis 30 gibt es noch eine weitere vollkommene Zahl. Kannst du sie finden?

Vollkommene Zahlen sind äußerst selten. Bislang kennt die Menschheit erst siebenundvierzig Stück.[1] Sie sind sämtlich gerade, d.h. durch 2 teilbar. Für die Mathematiker(innen) dieser Welt ist bis heute ungeklärt, ob eine vollkommene Zahl jemals ungerade sein kann. Auf jeden Fall hat bis heute noch niemand eine ungerade vollkommene Zahl entdeckt.

Um vollkommene Zahlen leicht erkennen zu können, benötigen wir eine möglichst schnelle Methode, um alle (echten) Teiler zu erfassen. Eine geeignete Methode ist die so genannte Primfaktorzerlegung, die wir auch für die Bruchrechnung gut gebrauchen können. Wir wollen uns daher auf dem nächsten Arbeitsblatt ausführlich mit der Primfaktorzerlegung und ihrem Nutzen beschäftigen, bevor wir die vollkommenen Zahlen das nächste Mal besuchen.

Primzahlen

Eine Zahl mit der Kontrollsumme 1 heißt **Primzahl**. Eine Primzahl hat also nur genau zwei (positive) Teiler: 1 und sich selbst. Beachte, dass 1 demnach <u>keine</u> Primzahl ist.

Aufgabe. Schreibe alle Primzahlen bis 30 auf!

Zur Kontrolle: Es gibt genau zehn Stück.

Aufgabe. Spiele das Spiel "Streich bloß keine Primzahl durch!" (nächste Seite) mit zwei oder mehr Spielern.

[1] Lehrer-Info: Nach Euler sind die geraden vollkommenen Zahlen genau die Zahlen $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, wobei 2^p-1 eine (so genannte Mersennesche) Primzahl ist. Dafür ist notwendig, aber nicht hinreichend, dass p eine Primzahl ist.

Spiel: Streich bloß keine Primzahl durch!

Ein Spiel für 2−6 Personen

Das Spielfeld mit den Zahlen von 1 bis 200 findest du auf der nächsten Seite.

Bei diesem Spiel wählt zunächst jeder Spieler einen abwischbaren Folienstift in einer anderen Farbe. Die Spieler sind reihum am Zug. Der Spieler mit den meisten Primzahlen in seinem Geburtsdatum beginnt.

Wer am Zug ist, kreist **vier Zahlen** ein, von denen er glaubt, dass sie keine Primzahlen sind.[2] Nun muss er sich mit seinen Mitspielern einigen, ob es wirklich keine Primzahlen sind. Wenn sie Zweifel haben, muss er eine stichhaltige Begründung liefern, etwa indem er einen Teiler nennt. Diejenigen eingekreisten Zahlen, mit denen alle Mitspieler einverstanden sind, darf er durchstreichen.

Danach kommt der Spieler zu seiner Linken an die Reihe.

Das Spiel ist zu Ende, wenn keine Nichtprimzahlen mehr gefunden werden können. Gewonnen hat der Spieler, der die meisten Kreuze in seiner Farbe gesetzt hat. − Viel Spaß!

Eratosthenes (275−194 v. Chr.)
ist quasi der Erfinder dieses Spiels.

[2] Wenn dieser Phase des Einkreisens zu lange dauern sollte, können die Spieler hierfür eine Zeitbegrenzung vereinbaren, z.B. 30 Sekunden.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Primfaktorzerlegung

Beginnen wir mit einem Beispiel aus der Bruchrechnung. Wir wollen den Bruch $\frac{85}{204}$ nach Möglichkeit mit kleineren Zahlen schreiben, d.h. kürzen. Ja, lässt er sich überhaupt kürzen? Und wenn ja, wie? Ein Erfolg versprechendes Vorgehen ist die **Zerlegung** von Zähler und Nenner **in Primfaktoren**. Indem wir schrittweise leicht erkennbare Faktoren herausteilen, erhalten wir

$$85 = 5\cdot 17 \quad \text{und} \quad 204 = 2\cdot 102 = 2\cdot 2\cdot 51 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 17.$$

Aha, die 17 als gemeinsamer Primfaktor von Zähler und Nenner lässt sich erst gut erkennen, nachdem wir die kleineren Primfaktoren herausgeteilt haben. Jetzt ist das Kürzen ein Kinderspiel:

$$\frac{85}{204} = \frac{5\cdot \cancel{17}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{17}} = \frac{5}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{5}{12}.$$

Wir konnten den Bruch mit der Zahl 17 kürzen, und weiter kürzen lässt er sich nicht, denn 17 ist der **größte gemeinsame Teiler** von 85 und 204. Wir schreiben

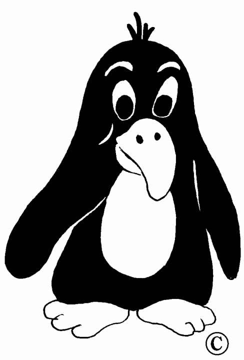
$$\text{ggT}(85, 204) = 17.$$

Aufgabe. Kürze in gleicher Weise die folgenden Brüche so weit wie möglich. Zur Kontrolle ist rechts in Klammern die Summe aus Zähler und Nenner angegeben.

(a) $\frac{116}{145} =$ __________ *(9)*

(b) $\frac{117}{364} =$ __________ *(37)*

Wenn ein Computer zur Verfügung steht, kannst du nun das **Primfaktorspiel** ausprobieren, das ein Lehrer der Maria-Ward-Schule Nürnberg geschrieben hat. Dabei geht es darum, in einer vorgegebenen Zahl bis 999 Primfaktoren bis 23 zu erkennen. Wenn du so einen Faktor erkannt hast, klickst du ihn an. Das Programm teilt dann dadurch, und du bekommst Punkte. Klickst du aus Versehen eine Primzahl an, die nicht als Faktor vorkommt, gibt es Minuspunkte.



© MARIA-WARD-SCHULE, NÜRNBERG

Der größte gemeinsame Teiler

Bei den bisherigen Beispielen war die größte Zahl, mit der wir den Bruch kürzen konnten, also der größte gemeinsame Teiler (kurz: ggT) von Zähler und Nenner immer <u>eine</u> Primzahl. Das braucht nicht so zu sein. Schauen wir uns einmal ein Beispiel an, bei dem Zähler und Nenner gleich <u>mehrere</u> Primfaktoren gemeinsam haben:

$$\frac{702}{780} = \frac{2\cdot 351}{10\cdot 78} = \frac{2\cdot 3\cdot 117}{2\cdot 5\cdot 3\cdot 26} = \frac{2\cdot 3\cdot 9\cdot 13}{2\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 13} = \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{3}\cdot 3\cdot \cancel{13}}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot 5\cdot \cancel{13}} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 5} = \frac{9}{10}.$$

Hierbei konnten wir also mit der Zahl $2\cdot 3\cdot 13 = 78$ kürzen; denn ist 78 der **größte gemeinsame Teiler** von 702 und 780, kurz

ggT(702 ; 780) = 78.

Aufgabe. Kürze in gleicher Weise die folgenden Brüche so weit wie möglich, und bestimme den ggT. *Zur Kontrolle ist rechts in Klammern die Summe aus Zähler und Nenner des gekürzten Bruchs bzw. die Quersumme des ggT angegeben.*

(a) $\frac{138}{483} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ *(9)*

ggT(138 ; 483) = *(15)*

(b) $\frac{465}{372} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ *(9)*

ggT(465 ; 372) = *(12)*

(c) $\frac{408}{468} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ *(73)*

ggT(408 ; 468) = *(3)*

(d) $\frac{266}{665} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ *(7)*

ggT(266 ; 665) = *(7)*

(e) $\frac{783}{1305} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ *(8)*

ggT(783 ; 1305) = *(9)*

Bevor du mit den Arbeitsblättern weitermachst, musst du jetzt erst einmal das **ggT-Puzzle** spielen, das dein Lehrer bereitstellt.

ggT-Puzzle

<u>Material:</u> Die Zahlenkarten 1 … 50 aus dem Teiler-Puzzle.

<u>Spielanleitung:</u> Verwende das unten abgebildete, laminierte Spielfeld, welches dein Lehrer bereitstellt. Auf die vier grauen Felder kommen **Teiler**. Auf die weißen Felder **Vielfache**. Die **Spielregel** lautet:
Zwischen zwei Vielfachen soll immer der größte gemeinsame Teiler liegen.

Beispiel: Zwischen den Zahlen $\boxed{12}$ und $\boxed{18}$ muss die Zahl $\boxed{6}$ liegen, denn ggT(12 ; 18) = 6, also muss es so aussehen:

$\boxed{12}\,\boxed{6}\,\boxed{18}$

Hier sind zwei Lösungen für das Spiel:

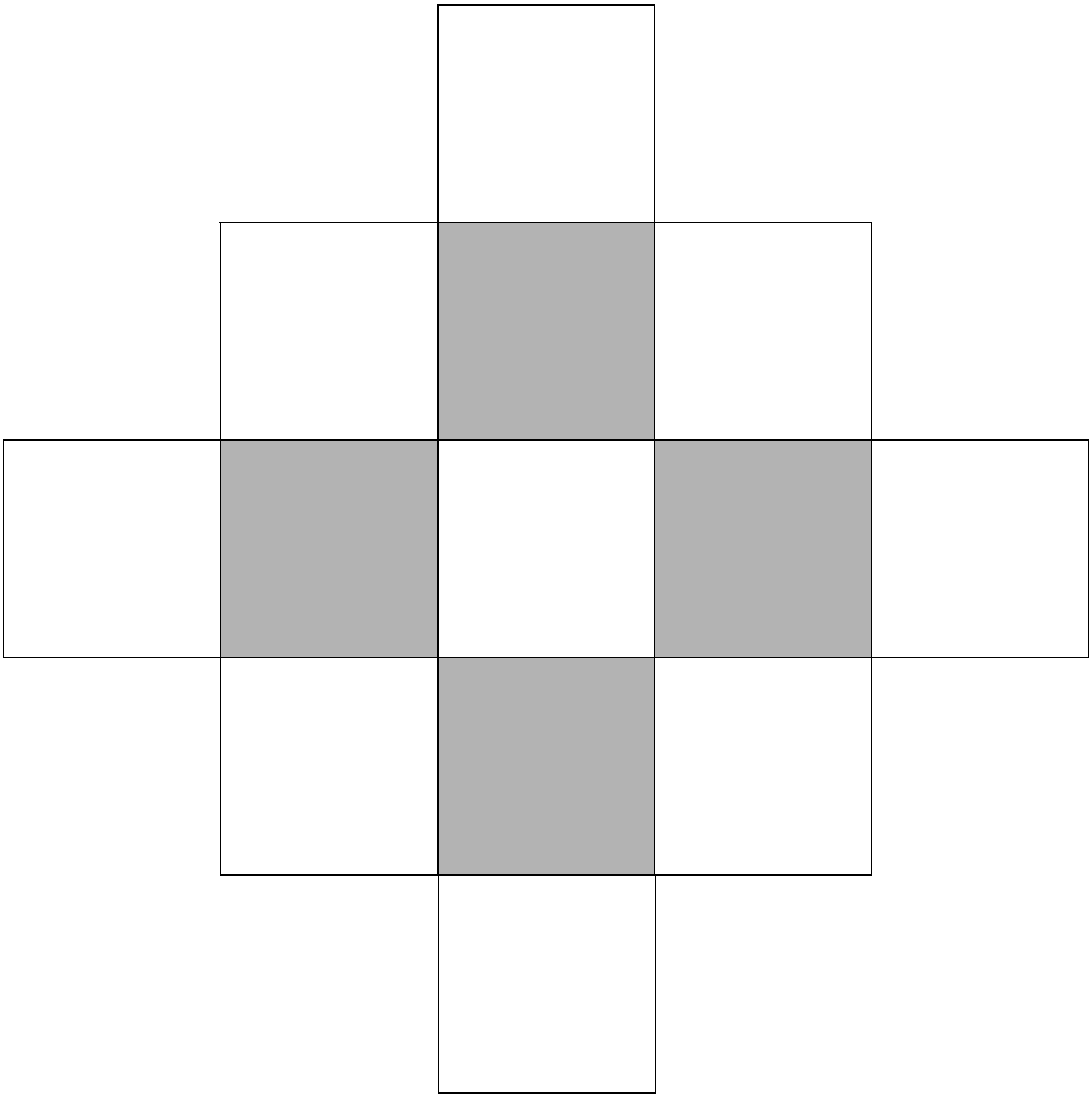
		15		
	9	3	12	
11	1	42	2	38
	28	7	14	
		35		

		36		
	18	6	12	
32	2	30	3	33
	10	5	15	
		35		

Kannst du eigene Muster legen?

Spielfeld für das ggT-Puzzle

Bitte auf Tonpapier drucken oder laminieren.



Auf den folgenden vier Arbeitsblättern erfährst du etwas über den euklidischen Algorithmus und das kleinste gemeinsame Vielfache. Dort lernst du u.a., wie du den ggT ohne Primfaktorzerlegung berechnen kannst. Für die vollkommenen Zahlen brauchst du diese Arbeitsblätter nicht unbedingt, so dass du sie auch überspringen und auf Seite 16 fortfahren kannst.

Der euklidische Algorithmus

Als Einstieg bekommst du eine schwierige Aufgabe. Bitte probiere nicht länger als 5–10 Minuten, sie zu lösen.

Aufgabe. Kürze den Bruch $\frac{899}{2759}$.

Wenn du es herausbekommen hast, dann alle Achtung: Du bist ein Meister!

Schwierig ist diese Aufgabe, weil weder Zähler noch Nenner einen kleinen Primfaktor besitzt. Es kann passieren, dass eine Primfaktorzerlegung dann so gut wie unmöglich ist. (Davon handelt der Ausflug in die Kryptographie weiter unten.) Zum Glück lassen sich solche Brüche aber mithilfe des so genannten **euklidischen Algorithmus** kürzen. Damit berechnen wir nämlich direkt den ggT(899 ; 2759), also die größte Zahl, mit der wir den Bruch kürzen können.

Beim euklidischen Algorithmus teilen wir immer die größere der beiden Zahlen <u>mit Rest</u> durch die kleinere. Es ergibt sich

```
2759 = 899·3 + 62.
2697
  62
```

Die Division hat also Rest 62. Jetzt werfen wir die größere Zahl, nämlich 2759, weg und wiederholen das Verfahren mit der kleineren Zahl, also 899, und dem (noch kleineren) Rest 62:

```
899 = 62·14 + 31.
62
279
248
 31
```

Als Nächstes müssen wir die Division mit 62 und 31 durchführen:

$$62 = 31 \cdot 2.$$

Weil diese Division aufgeht (kein Rest), ist der euklidische Algorithmus beendet und der größte gemeinsame Teiler von 2759 und 899 gefunden: Es ist der Teiler 31 aus dem letzten Schritt. Als Ergebnis schreiben wir auf:

ggT(2759 ; 899) = 31.

Zur Probe teilen wir beide Zahlen durch 31, den gefundenen ggT:

899 : 31 = 29 und 2759 : 31 = 89 – Es klappt!

Nun können wir auch unseren Bruch kürzen: $\frac{899}{2759} = \frac{31 \cdot 29}{31 \cdot 89} = \frac{29}{89}$.

Aufgabe. Berechne den ggT, und kürze jeweils den Bruch so weit wie möglich. *Zur Kontrolle ist wieder rechts in Klammern die Quersumme des ggT bzw. die Summe aus Zähler und Nenner des gekürzten Bruchs angegeben.*

(a) ggT(493 ; 1037) = *(8)*

(b) ggT(1633 ; 391) = *(5)*

$\frac{1633}{391} = \underline{\qquad\qquad}$ *(88)*

(c) ggT(22523 ; 3737) = *(2)*

$\frac{3737}{22523} = \underline{\qquad\qquad}$ *(260)*

(d) $\frac{8083}{1829} = \underline{\qquad\qquad}$ *(168)*

Aufgabe*. Schreibe eine Begründung dafür auf, warum der euklidische Algorithmus funktioniert.

Lösung der Aufgabe*

(Begründung für den euklidischen Algorithmus)

Der letzte Rest beim euklidischen Algorithmus (im Einführungsbeispiel die Zahl 31) teilt den vorletzten Rest und dadurch alle vorhergehenden Zahlen bis zu den beiden Zahlen, mit denen man gestartet ist. Der letzte Rest ist also ein Teiler der beiden Startzahlen.

Dass der letzte Rest tatsächlich der **größte** gemeinsame Teiler der beiden Startzahlen ist, ist etwas schwieriger einzusehen. Wir machen uns das an dem Einführungsbeispiel klar. Dort hatten wir berechnet

$2759 = 899\cdot 3 + 62$, also $62 = 2759 - 899\cdot 3$,

Weiter war

$899 = 62\cdot 14 + 31$, und 31 war der letzte Rest.

Stellen wir auch die zweite Gleichung so um wie die erste und setzen die erste umgestellte ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 31 &= 899 - 62\cdot 14 = 899 - (2759 - 899\cdot 3)\cdot 14 \\ &= 899\cdot 43 - 2759\cdot 14 \end{aligned}$$

Wir können also aufgrund des euklidischen Algorithmus den letzten Rest aus geeigneten Vielfachen der beiden Startzahlen zusammensetzen: $31 = 899\cdot 43 - 2759\cdot 14$.
Wenn nun eine Zahl beide Startzahlen, hier 899 und 2759, teilt, so teilt sie auch automatisch die Zahl $899\cdot 43 - 2759\cdot 14 = 31$.
Jeder gemeinsame Teiler von 899 und 2759 ist also automatisch auch ein Teiler von 31. Damit ist 31 der größte gemeinsame Teiler von 899 und 2759.

ggT und kgV

Der größte gemeinsame Teiler hat noch ein kleines Schwesterchen, das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz: kgV. Die beiden Geschwister verstehen sich sehr gut mit einander und helfen sich gerne gegenseitig. Wir beginnen wieder mit einer Aufgabe aus der Bruchrechnung.

Aufgabe. Berechne $\frac{7}{12} - \frac{3}{8} =$

Bilde bitte zur Kontrolle von deinem Ergebnis wieder die Summe aus Zähler und Nenner.

Zähler + Nenner =

Fahre unterhalb links oder rechts fort, je nachdem, welche Zahl du als Summe herausbekommen hast.

29	*nicht 29*
Dann rechne die Aufgabe noch einmal, diesmal mit $12 \cdot 8 = 96$ als gemeinsamem Nenner: $\frac{7}{12} - \frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} =$	Dann probiere einmal 24 als gemeinsamen Nenner: $\frac{7}{12} - \frac{3}{8} = \frac{\quad}{12 \cdot 2} - \frac{\quad}{8 \cdot 3} =$

Vergleiche nun deine beiden Rechenwege! Welcher ist einfacher? Diskutiere Vor- und Nachteile mit einem Mitschüler oder einer Mitschülerin, die ebenfalls dieses Aufgabenblatt bearbeitet.

Es lohnt sich also, wenn man Brüche addieren oder subtrahieren will, einen möglichst kleinen gemeinsamen Nenner zu suchen. Der kleinste gemeinsame Nenner im vorigen Beispiel ist 24, denn 24 ist das **kleinste gemeinsame Vielfache**, kurz kgV, der beiden einzelnen Nenner 12 und 8. Wir schreiben

$$\text{kgV}(12; 8) = 24 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3.$$

Im vorigen Beispiel ist es vielleicht noch einfach, aber wie lässt sich dieses kgV, der kleinste gemeinsame Nenner, auch bei anspruchsvollen Aufgaben sicher bestimmen? Das geht wiederum mithilfe der Primfaktorzerlegung, oder direkt mit dem ggT:

$$\text{ggT}(12; 8) = \text{ggT}(2\cdot 2\cdot 3; 2\cdot 2\cdot 2) = 2\cdot 2 = 4.$$

Die 4 kommt als Teiler in 12 und in 8 vor. Sie braucht daher ins kgV nur einmal einzugehen. Hinzu kommen dann noch die zusätzlichen Faktoren in 12 und 8.

Aus $12 = 4\cdot 3$ und $8 = 4\cdot 2$ erhalten wir $\text{kgV}(12; 8) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$.

Aufgabe. Bestimme das kgV, und berechne den Bruch mit möglichst kleinem Nenner.
Zur Kontrolle sind rechts in Klammern die Quersumme des kgV sowie die Summe aus Zähler und Nenner des Ergebnisbruchs angegeben.

(a) kgV(12 ; 54) = *(9)*

$\frac{5}{54} - \frac{1}{12} =$ *(109)*

(b) kgV(740 ; 925) = *(10)*

$\frac{3}{740} + \frac{2}{925} =$ *(3723)*

(c) kgV(1054 ; 1581) = *(12)*

$\frac{5}{1054} - \frac{7}{1581} =$ *(3163)*

(Den ggT berechnest du hier am besten mit dem euklidischen Algorithmus.)

Selbst wenn wir mit dem kleinstmöglichen Nenner rechnen, kann es passieren, dass man den Ergebnisbruch am Schluss noch einmal kürzen kann. Dafür ist es besser, den gemeinsamen Nenner als Produkt stehen zu lassen. Im folgenden Beispiel addieren wir zwei Brüche mit den Nennern

$$2415 = 3 \cdot 5 \cdot 161 \quad \text{und} \quad 2898 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 161.$$

Der kleinste gemeinsame Nenner ist also

$$\text{kgV}(\,2415\,;\,2898\,) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 161.$$

Damit rechnen wir dann

$$\frac{16}{2415} + \frac{13}{2898} = \frac{16 \cdot 6}{2415 \cdot 6} + \frac{13 \cdot 5}{2898 \cdot 5} = \frac{96 + 65}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 161} = $$
$$= \frac{161}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 161} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{90}.$$

Aufgabe. Berechne und kürze so weit wie möglich. *Zur Kontrolle ist rechts in Klammern die Summe aus Zähler und Nenner angegeben.*

(a) $\frac{37}{102} - \frac{27}{170} =$ *(307)*

(b) $\frac{2}{390} + \frac{1}{312} =$ *(121)*

(c) $\frac{92}{22523} - \frac{13}{3737} =$ *(8256)*

Kurzer Ausflug in die Kryptographie

Die Kryptographie befasst sich mit der Verschlüsselung geheimer Botschaften. Das ist heute wichtiger denn je, denn im Internet werden pausenlos geheime Botschaften ausgetauscht. Und das, obwohl im Prinzip jede Nachricht von jedem Unbefugten mitgelesen werden kann! Wie kann ich denn unter solchen Bedingungen überhaupt eine geheime Nachricht wie z.B. die Geheimzahl meines Bankkontos verschicken?

Nach dem heute üblichen RSA-Verfahren läuft das folgendermaßen ab. Meine Bank denkt sich zwei sehr große Primzahlen aus und multipliziert sie mit einander. Das erhaltene Produkt schickt sie an mich, während sie die beiden einzelnen Primzahlen streng geheim hält. Mithilfe des Produkts verschlüssle ich meine Geheimzahl und schicke sie über das Internet an meine Bank. Auch wenn jemand das Produkt und meine damit verschlüsselte Geheimzahl kennt, kann er sie damit nicht entschlüsseln. Das kann nur meine Bank mithilfe der beiden geheim gehaltenen einzelnen Primzahlen.

Damit das Verfahren auch sicher ist, darf es nicht möglich sein, das Produkt wieder in die beiden einzelnen Primzahlen zu zerlegen. Diese Aufgabe wird in der Tat nach bisherigem Kenntnisstand als überaus schwierig eingestuft. Probiere es einmal selbst. Jede der folgenden Zahlen ist ein Produkt aus zwei Primfaktoren:

2002703, 2705347, 2336849, 2778473

Sollte es dir ohne die Hilfe eines Computers tatsächlich gelingen, eine dieser Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen, dann hast du wahrscheinlich ein neues mathematisches Verfahren gefunden, **das die Menschheit unbedingt erfahren muss!** Mit einem solchen Verfahren könnte man ja alle gängigen Verschlüsselungen knacken und käme damit im Prinzip an **alle Passwörter und Geheimzahlen der Welt!**

Vollkommene Zahlen (Fortsetzung)

Nachdem wir nun die Primfaktorzerlegung recht gut beherrschen, können wir wieder zu unseren vollkommenen Zahlen zurückkehren. Zur Erinnerung: Eine vollkommene Zahl ist gleich ihrer Kontrollsumme, also gleich der Summe aller ihrer echten Teiler. Zum Beispiel ist die Zahl 28 vollkommen, denn

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Bei einer großen Zahl kann die Auflistung all ihrer Teiler ziemlich unübersichtlich werden. Es wird übersichtlicher, wenn man die Zahl zunächst in ihre Primfaktoren zerlegt. Schauen wir uns als Beispiel die Zahl 600 an. Ihre Primfaktorzerlegung ist

$$600 = 6\cdot 10\cdot 10 = (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Die 600 hat somit die drei Primteiler 2, 3 und 5, wobei die 2 dreifach, die 3 einfach und die 5 zweifach vorkommt. Dies können wir kürzer mit so genannten **Primpotenzen** schreiben als

$$600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2.$$

Die **Potenz** 2^3 bedeutet also, dass die Zahl 2 dreimal mit sich selbst multipliziert wird:

$$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8.$$

Aufgabe. Berechne in gleicher Weise die Potenzen 5^2 und 3^4.
(Zur Kontrolle: Die Ergebnisse haben die Quersummen 7 und 9.)

Aufgabe. Schreibe, wie oben die 600, die folgenden Zahlen als Produkt von Primpotenzen:

60 =	350 =
50 =	150 =
45 =	450 =

Ausgehend von der Primfaktorzerlegung $600 = 2\cdot2\cdot23\cdot5\cdot5 = 2^3\cdot3\cdot5^2$ können wir schrittweise alle positiven Teiler von 600 aufschreiben.
Im ersten Schritt berücksichtigen wir nur die drei gleichen Primpotenz $2^3 = 2\cdot2\cdot2$ und bekommen die Teiler

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8.$$

$$\cdot2 \qquad \cdot2 \qquad \cdot2$$

Auf diese vier Teiler wenden wir die nächste Primpotenz $3^1 = 3$ an und erhalten acht Teiler

$$1, 2, 4, 8, \quad 3, 6, 12, 24.$$

$$\cdot3$$

Auf diese acht Teiler wenden wir anschließend noch die Primpotenz $5^2 = 5\cdot5$ an:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, \quad 5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120, \quad 25, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 600.$$

$$\cdot5 \qquad\qquad \cdot5$$

So ergeben sich schließlich alle 24 Teiler von 600. Nach Größe geordnet erhalten wir also die 23 echten Teiler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300. Damit hat 600 die Kontrollsumme 1260, ist also nicht vollkommen.

Aufgabe. Bestimme auf gleiche Weise alle positiven Teiler von 450. Kannst du vorhersagen, wie viele es werden? Wie viele positive Teiler hat 45, wie viele 150, wie viele 350? Kannst du eine Regel aufstellen?

Aufgabe. Bestimme die Kontrollsumme von 496.